

Brückenkurs Mathematik

Priv.-Doz. Dr. Gerald Hofmann

Berufsakademie Thüringen, Staatliche Studienakademie Eisenach,
September 2001

Vorwort

Eines der wichtigsten Hilfsmittel im Ingenieurstudium ist die Mathematik. Ohne sie kann man viele Darstellungen in den Fachgebieten nicht verstehen und keine technischen Probleme lösen.

Zum Verständnis der für die Ausbildung erforderlichen höheren Mathematik brauchen Sie bei Studienbeginn nicht nur gesichertes Grundlagenwissen, sondern auch Rechenfertigkeit. Zu den unverzichtbaren mathematischen Voraussetzungen gehören neben gewissen Grundlagen der Analysis und der analytischen Geometrie vor allem die sichere Beherrschung des arithmetischen und algebraischen Rechnens.

Während der Vorlesungen und in den Prüfungen wird von Ihnen erwartet, daß Sie die im Brückenkurs Mathematik behandelten Aufgaben und ähnliche Aufgaben schnell lösen können.

Im Kurs werden nach einer kurzen theoretischen Einführung in das jeweilige Stoffgebiet typische und erprobte Aufgaben geübt und besprochen. Zur weiteren Vertiefung und Übung werden den Kursteilnehmern zusätzliche Aufgaben (mit Lösungen) zur Verfügung gestellt. Die im folgenden mit (*) gekennzeichneten Aufgaben sind weiterführend und können wahlweise von den Kursteilnehmern gelöst werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben zur Elementarmathematik	2
1.1	Die vier Grundrechenarten	2
1.2	Potenz- und Wurzelrechnung	3
1.3	Logarithmenrechnung	4
2	Aussagenlogik, Mengenlehre und Beweisprinzipien der Mathematik	5
2.1	Aussagenlogik	5
2.2	Mengenlehre	6
2.3	Beweisprinzipien	6

*E-mail: hof136@aol.com

3	Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	7
3.1	Der Gaußsche Algorithmus	7
3.2	Aufgaben zum Aufstellen von Gleichungen	8
4	Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen	8
5	Transzendente Gleichungen und Gleichungssysteme	9
5.1	Quadratische und biquadratische Gleichungen	9
5.2	Wurzelgleichungen	9
5.3	Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen	9
5.4	Goniometrische Gleichungen	10
5.5	Transzendente Gleichungssysteme	10
6	Vektorrechnung und analytische Geometrie	10
6.1	Vektoralgebra	10
6.2	Vektorielle Beweise in der Geometrie	11
6.3	Anwendung der Vektorrechnung in der Physik	12
6.4	Punkte und Geraden in der Ebene	12
6.5	Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	12
6.6	Kegelschnitte	14
7	Folgen und Reihen	15
7.1	Folgen reeller Zahlen	15
7.2	Reihen	15
8	Funktionen	16
8.1	Zum Begriff der Funktion und elementare Eigenschaften von Funktionen	16
8.2	Grenzwerte und Stetigkeit	17
8.3	Die Umkehrfunktion	18
8.4	Ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen	18
9	Differentialrechnung	19
9.1	Ableitungen von Funktionen	19
9.2	Kurvendiskussion	20
9.3	Extremwertaufgaben	21
10	Integralrechnung	21
10.1	Integration durch Grundintegrale	21
10.2	Integration durch Substitution	21
10.3	Partielle Integration	22
10.4	Weiterführende Aufgaben	22
10.5	Das bestimmte Integral	23

1 Aufgaben zur Elementarmathematik

1.1 Die vier Grundrechenarten

Aufg. 1.1.1 Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $2, 1 + \frac{7}{12} - \frac{3}{8} =$

Aufg. 1.1.2 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} =$

b) $\frac{8a+8b}{\frac{a+b}{a-b}} =$

c) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{u}{v}}{\frac{a}{b} - \frac{u}{v}} =$

Aufg. 1.1.3 Es ist zu addieren:

a) $\frac{7a+2b}{6ab-2b^2} - \frac{6a^2+7b^2}{9a^2b-b^3} - \frac{6a^2-4b^2}{27a^3-3ab^2} - \frac{3a-4b}{9a^2+3ab}$,

b) $\frac{u^2}{4u^2-4uv+v^2} + \frac{u^2+v^2}{v^2-4u^2} - \frac{v^2}{4u^2+4uv+v^2} + \frac{uv(6uv-5v^2)}{(4u^2-v^2)^2}$.

Aufg. 1.1.4 Es ist zu vereinfachen: $\frac{6-10x}{4x + \frac{\frac{15}{2-6x}}{5 + \frac{30x}{2-6x}}}$.

Aufg. 1.1.5 Vereinfachen Sie:

a) $\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a-1}{a^2+a} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a^2-1} =$

b) $\frac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{1 + \frac{a+1}{a-1}} =$

c) $\left[\left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2} \right] \cdot \frac{3}{x+y} =$

d) $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} =$

e) $\frac{1}{a - \frac{1}{1 + \frac{a}{x-a}}} =$

f) $\frac{a+(1-ax)^{-1}}{1+(1-ax)^{-1}}$ mit $x = \frac{1}{a-1}$.

Aufg. 1.1.6 Führen Sie die Polynomdivision aus:

$$(24x^4 - 26x^3 - 76x^2 - 32x) : (4x^2 - 7x - 8) =$$

1.2 Potenz- und Wurzelrechnung

Aufg. 1.2.1 Vereinfachen Sie:

a) $\frac{(12^2)^4 \cdot (8^4)^3}{(4^4)^6} =$

b) $\left(\frac{4a^{-2}x}{3a^3x^{-3}}\right)^2 : \frac{(3a^4x^2)^{-3}}{(2ax^{-3})^{-2}} =$

c) $\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$

Aufg. 1.2.2 Vereinfachen Sie:

a) $\sqrt{x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{x^9} \cdot \sqrt[3]{y^2} =$

b) $\left(\sqrt[10]{x^2 - 2xy + y^2}\right)^5 =$

c) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} =$

d) $\sqrt[n]{a^{n+3}} \sqrt[3]{a^{3n+1}} \sqrt[3]{a^{-1}} =$

e) $\left[4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right] \left[4^{-0,25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right] =$

f) $\sqrt{(a-b)^2} =$

g) $\sqrt{a^6} =$

h) $a + \sqrt{1 - 2a + a^2} =$

i) $x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} =$

k) $\sqrt[6]{(1 - \sqrt{3})^2} =$

l) $\sqrt{a^2b^{-2}} \sqrt[3]{27ab^3} \sqrt{(a+1)^2} =$

Aufg. 1.2.3 Machen Sie den Nenner von $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ rational.

Aufg. 1.2.4 Vereinfachen Sie $a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$.

1.3 Logarithmenrechnung

Aufg. 1.3.1 Zerlegen Sie unter Anwendung der Logarithmengesetze! Überlegen Sie, für welche Werte der Variablen die gegebenen Terme (im Reellen) definiert sind!

a) $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} =$ b) $\log_5 \frac{a^2 b}{a+b} =$
c) $\ln \frac{\sqrt{a} b^{-2}}{\sqrt[3]{c} d^{-3}} =$ d) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \sqrt[m]{b^{-1}}}$ für $a > 0, b > 0$.

Aufg. 1.3.2 Bestimmen Sie x ohne Hilfsmittel (Taschenrechner, Zahlentafel) aus

a) $x = \log_2 \frac{1}{8}$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$
c) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$ d) $x = 81^{0,5 \cdot \log_3 7}$
e) $\log x = \log u - \frac{1}{2} \log v + \frac{4}{3} \log w$
f) $\lg x = \frac{1}{3} \lg(u^2 - v^2) - \frac{1}{2} \lg(u - v) - \frac{1}{2} \lg(u + v)$
g) $\ln x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) - 0,5 \ln \left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} \right) + \ln \sqrt{a}$

Aufg. 1.3.3 Berechnen Sie x ohne Taschenrechner oder Zahlentafel

a) $x = 2 \cdot 10^{2 \lg 2}$ b) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2 + \lg 31)}}$
c) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$ d) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

2 Aussagenlogik, Mengenlehre und Beweisprinzipien der Mathematik

2.1 Aussagenlogik

Aufg. 2.1.1 Geben Sie die Negation der folgenden Aussagen an:

- a) Das Wasser ist heiß. b) (-5) ist negativ.
c) 8 ist positiv. d) (-4) ist nichtnegativ.
e) 2 ist größer als (-3) .

Aufg. 2.1.2 Gegeben sind die folgenden beiden Aussagen A und B:

A: Das Viereck ist ein Quadrat.

B: Die Diagonalen des Vierecks stehen aufeinander senkrecht.

Ist A notwendig für B? Ist A hinreichend für B? Ist A notwendig und hinreichend für B?

Aufg. 2.1.3 Ist die Negation der Aussage "Alle Autos in Berlin sind weiß"

- a) "Kein Auto in Berlin ist weiß", oder
- b) "Es gibt schwarze Autos in Berlin", oder
- c) "Es gibt Autos in Berlin, die nicht weiß sind", oder
- d) "Es gibt keine Autos in Berlin, die nicht weiß sind", oder
- e) "Alle Autos in Dresden sind weiß"?

Aufg. 2.1.4 Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Wahrheitstabelle, daß die folgenden logischen Ausdrücke logisch gleichwertig sind:

- a) $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A) \vee (\neg B)$
- b) $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$
- c) $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Aufg. 2.1.5 Welche der folgenden Paare von logischen Ausdrücken sind logisch gleichwertig ?

- a) $A \wedge (A \Rightarrow B)$ und $A \wedge B$
- b) $(B \Rightarrow A) \wedge A$ und $B \wedge A$

2.2 Mengenlehre

Aufg. 2.2.1 Es seien die folgenden drei Mengen gegeben. A sei die Menge der Teiler der natürlichen Zahl 15; B die Menge der Primzahlen, die kleiner als 10 sind; und C die Menge der ungeraden Zahlen, die kleiner als 9 sind.

- a) Beschreiben Sie die Mengen A, B, C durch Angabe ihrer Elemente.
- b) Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$.

Aufg. 2.2.2 Geben Sie je ein Beispiel von Mengen A, B reeller Zahlen an, so daß:

- a) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$ gilt,
- b) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$ gilt.
- c) Gibt es Beispiele von Mengen A, B , so daß sowohl die Bedingungen von a) als auch die von b) erfüllt sind?

Aufg. 2.2.3 Bestimmen Sie sämtliche Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c\}$.

Aufg. 2.2.4 Was folgt für das Element a aus

- a) $a \in M \cup N$ und $a \notin M$
- b) $a \notin M \cup N$ und $a \in M$?

2.3 Beweisprinzipien

Aufg. 2.3.1 Beweisen Sie a) direkt und b) indirekt, daß für positive spitze Winkel α und β die Ungleichung

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$$

gilt.

Aufg. 2.3.2 Zeigen Sie indirekt:

a) $\sqrt{2}$ ist irrational.

b) $\lg 3$ ist irrational.

c) Für beliebige reelle Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 gilt

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$

Aufg. 2.3.3 Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum_{j=1}^n j^3 = \left(\sum_{j=1}^n j\right)^2$

c) $\sum_{j=1}^n \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

3 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

3.1 Der Gaußsche Algorithmus

Aufg. 3.1.1 Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} 3x &= 4y - 15 \\ 5y &= 11 - 4x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 18x - 25y &= 31,2 \\ 23,4x - 32,5y &= 23,4 \end{aligned}$$

Aufg. 3.1.2 Lösen Sie die folgenden lineare Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= -9 \\-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 7 \\5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 10 \\3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 19x_4 &= -18\end{aligned}$$

c) (*)

$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 12 \\3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= -1 \\4x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 8 \\-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -23\end{aligned}$$

3.2 Aufgaben zum Aufstellen von Gleichungen

Aufg. 3.2.1 An einer Hochschule gibt es P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 25 Studenten. Schreiben Sie diese Aussage in Form einer Gleichung.

Aufg. 3.2.2 Ein Benzinkessel kann durch zwei Zuleitungen gefüllt werden. Ist die erste 6 Minuten und die zweite 3 Minuten geöffnet, so werden $5/6$ des Behälters gefüllt. Ist die erste 3 Minuten und die zweite 6 Minuten geöffnet, so bleibt $1/12$ des Behälters leer. Wie lange muß jede Zuleitung geöffnet sein, damit sie einzeln den Behälter füllt? Wie lange müssen sie zusammen in Betrieb genommen werden, um den Kessel zu füllen?

Aufg. 3.2.3 Drei Zahnräder eines Getriebes haben zusammen 80 Zähne. Bei 10 Umdrehungen des ersten Rades drehen sich das zweite 18- und das dritte 45 mal. Wieviel Zähne hat jedes Rad?

Aufg. 3.2.4 Von drei Pumpen hebt die zweite $3m^3$ Wasser mehr, aber $4m$ weniger hoch als die erste. Die dritte Pumpe hebt in der gleichen Zeit $2m^3$ Wasser weniger, aber $6m$ höher als die erste. Welche Wassermengen bis zu welcher Höhe hebt jede Pumpe, wenn sie alle gleiche Leistungen haben ?

4 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

Aufg. 4.0.5 Für welche reellen x gelten die folgenden Ungleichungen ?

$$\begin{aligned}\text{a) } \frac{x}{3} + 5 &< \frac{x}{7} - 7, & \text{b) } \frac{x+1}{x-1} &> 3, & \text{c) } |2x - 3| &\leq 6, \\ \text{d) } |3 - 2x| &> 5, & \text{e) } -1 &< \frac{7x-3}{8x-5} < 1, & \text{f) } x^2 - 4x + 3 &> \frac{1}{2}x + 1.\end{aligned}$$

Aufg. 4.0.6 Lösen Sie graphisch:

a) $\frac{x+1}{x-1} \geq 3$, b) $|2x - 5| > 2 \cdot |x + 1|$, c) $|x^2 - 2x| > \frac{3}{4}$.

Aufg. 4.0.7 Für welche reellen x gelten die folgenden Ungleichungen

a) $\frac{x^2 - 4x}{2x - 5} \leq 1$,

b) $\frac{x^2 - 9}{2x - 1} \leq 1$?

Aufg. 4.0.8 Für welche reellen x gelten die folgenden Ungleichungen

a) $|x^2 - 9| < 2x - 1$,

b) $|x^2 - 4x| < 2x - 5$?

5 Transzendente Gleichungen und Gleichungssysteme

5.1 Quadratische und biquadratische Gleichungen

Aufg. 5.1.1 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 2x - 35 = 0$ b) $8x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

e) $\frac{3x+10}{x-14} + x = 2$

f) $a + x = \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$, wobei a ein reeller Parameter ist.

5.2 Wurzelgleichungen

Aufg. 5.2.1 Bestimmen Sie alle reellen x , die die folgenden Wurzelgleichungen erfüllen:

a) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$ b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

c) $\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{7x-10} = 7\sqrt{x-1}$

d) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+7} = 4$ e) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-4} = 5$

Aufg. 5.2.2 Zeigen Sie, daß die Wurzelgleichung

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x-2} = 3$$

keine reelle Lösung haben kann, ohne diese Gleichung zu lösen.

5.3 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Aufg. 5.3.1 Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-7} = \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14}$

c) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

d) $3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$ e) $25 \left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} = 37 \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5}$

f) $27,85^{x+1} = 5,764$

Aufg. 5.3.2 Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $\log_4(x+1) = -3$ b) $\lg(x+1)^2 = \lg 36$

c) $\ln(2x+3) = 0,2$ d) $\frac{2\lg 2 + \lg(x-3)}{\lg(7x+1) + \lg(x-6) + \lg 3} = \frac{1}{2}$

e) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

f) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

5.4 Goniometrische Gleichungen

Aufg. 5.4.1 Vereinfachen Sie $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x}$.

Aufg. 5.4.2 Lösen Sie:

a) $\tan x = \tan \alpha$ b) $\sin x = \sin \alpha$ c) $\sin x = -0,5$ (α ist eine gegebene reelle Konstante)

Aufg. 5.4.3 Bestimmen Sie alle reellen x , die die folgenden Gleichungen genügen:

a) $\sin 6x = \sin 4x$ b) $\tan x = \tan 2x$ c) $\tan 2x - \cot 3x = 0$

d) $8 \sin x - 3 \cos x = 4$ e) $\tan 3x = \sin 6x$

5.5 Transzendente Gleichungssysteme

Aufg. 5.5.1 Bestimmen Sie alle reellen x, y , die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \frac{3}{2} \\ \cos^2 x - \sin^2 y &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufg. 5.5.2 Bestimmen Sie alle reellen x, y , die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned}6x^2 + 4y &= 0 \\ 4x - 6y^2 &= 0\end{aligned}$$

6 Vektorrechnung und analytische Geometrie

6.1 Vektoralgebra

Aufg. 6.1.1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\vec{a} + \vec{b}$ graphisch und rechnerisch!

Aufg. 6.1.2 Gegeben seien Vektoren \vec{a}, \vec{b} mit den Eigenschaften $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Bestimmen Sie $|\vec{a} + \vec{b}|$ graphisch und rechnerisch!

Aufg. 6.1.3 Bestimmen Sie alle Vektoren der Länge 3, die auf dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

Aufg. 6.1.4 Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, -2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}, \angle(\vec{a}, \vec{b})$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufg. 6.1.5 Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ wird auf den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal projiziert. Wie lang ist seine Projektion p ?

Aufg. 6.1.6 Zu dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll ein Vielfaches des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ addiert werden, so daß die Summe $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ auf dem Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht steht. Wie ist λ zu wählen?

Aufg. 6.1.7 Bestimmen Sie y und z so, daß der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ auf den Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht steht. Welche Länge hat der Vektor \vec{a} , und welchen Winkel bildet er mit den Vektoren $\vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

6.2 Vektorielle Beweise in der Geometrie

Aufg. 6.2.1 Beweisen Sie mittels Vektorrechnung:

- a) Satz des Thales: Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

- b) Halbieren in einem ebenen Viereck die Diagonalen einander, so ist das Viereck ein Parallelogramm.
- c) In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.
- d) Verbindet man in einem Dreieck die Mittelpunkte zweier Seiten, so verläuft diese Verbindungsstrecke parallel zur dritten Seite.

Aufg. 6.2.2 Gegeben sind die Punkte $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(-1, 3, -4)$, $P_3(0, 5, -7)$, $P_4(2, 4, -4)$. Zeigen Sie, daß diese vier Punkte

- a) in einer Ebene liegen,
- b) Eckpunkte eines Parallelogramms sind,
- c) einen Rhombus aufspannen,
- d) die Diagonalen des Rhombus orthogonal zueinander sind.

6.3 Anwendung der Vektorrechnung in der Physik

Aufg. 6.3.1 Auf die Ebene mit der Gleichung $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ wirkt eine Kraft von 2000 N in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Welche Kraft wirkt senkrecht auf die Fläche ?

6.4 Punkte und Geraden in der Ebene

Aufg. 6.4.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch den Punkt $P(-4, 7)$, die parallel zur Geraden g , die durch $x_1 - 3x_2 = 10$ gegeben ist, verläuft! Welchen Abstand hat P von g ?

Aufg. 6.4.2 Wandeln Sie die Parameterform $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, der Geraden g in eine Skalarform um!

Aufg. 6.4.3 Wandeln Sie die Skalarform der Geradengleichung

$$(2, -3)\vec{x} \equiv 2x_1 - 3x_2 = -4$$

in eine Parameterform um!

6.5 Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum

Aufg. 6.5.1 Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(-2, 3, -5)$ und $P_2(1, -4, -1)$?

Aufg. 6.5.2 Wandeln Sie die Parameterform der Ebenengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

in eine Skalarform um!

Aufg. 6.5.3 Wandeln Sie die Skalarform der Ebenengleichung

$$(3, -2, 5) \vec{x} = 8$$

in eine Parameterform um!

Aufg. 6.5.4 Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2 , wobei

$$E_1 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$$

$$E_2 : 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 12 = 0$$

gilt.

Aufg. 6.5.5 Wo schneiden sich die folgenden Geradenpaare bzw. wie liegen sie zueinander?

a)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

d)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{3} \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{12} \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Aufg. 6.5.6 Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(2, 1, 1)$ von der Ebene

$$x_1 + x_2 - x_3 = -1.$$

Aufg. 6.5.7 Bestimmen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen E_1 und E_2 !

$$E_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$E_2 : (2, -4, 2) \vec{x} = 1$$

Aufg. 6.5.8 Gegeben seien eine Ebene

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Gerade

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

($\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$) und ein Punkt $P(3, -2, 5)$.

- Geben Sie die Gleichung der Ebene E_2 an, die senkrecht zur Geraden g_1 verläuft und den Punkt P enthält.
- Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g_2 , die senkrecht auf E_1 steht und den Punkt P enthält.
- Wie groß ist der Abstand d des Punktes P von der Geraden g_1 ?

Aufg. 6.5.9 Gegeben seien die Punkte $P_1(2, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Geben Sie die Gleichung der Ebene E_1 an, die senkrecht zur Geraden g verläuft und den Punkt P_1 enthält.
- Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E_2 , die die Gerade g und den Punkt P_2 enthält.
- Wie groß ist der Abstand d des Punktes P_1 von der Ebene E_2 ?

6.6 Kegelschnitte

Aufg. 6.6.1 Wie lautet die Gleichung des Kreises in der x, y -Ebene mit dem Mittelpunkt $M(1, 2)$ und dem Radius $r = \sqrt{5}$?

Aufg. 6.6.2 (*) Klassifizieren Sie die folgenden Kegelschnittsgleichungen und geben Sie die Lage sowie die Parameter der jeweiligen Kegelschnitte an !

a) $x^2 - y^2 + 2(x - y) - 1 = 0$

b) $6x - y^2 - 4y - 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$

d) $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

7 Folgen und Reihen

7.1 Folgen reeller Zahlen

Aufg. 7.1.1 Berechnen Sie den Grenzwert der Zahlenfolgen, deren allgemeine Glieder durch die folgenden Formeln gegeben sind:

a) $a_n = \frac{4n-3}{6-5n}$ b) $a_n = \frac{2n(n-1)^2}{(n+2)^3}$

c) $a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$ d) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$

e) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ f) $a_n = \frac{n-10}{3}$

Aufg. 7.1.2 Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Monotonie:

a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Aufg. 7.1.3 Wenn $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{x_n^{-1}} = e = 2,718 \dots \text{ (Eulersche Zahl).}$$

Unter Verwendung der obigen Formel berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für

a) $a_n = [1 + (3n)^{-1}]^n$ b) $a_n = [1 - (n - 2)^{-1}]^{n+5}$

c) $a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$ d) $a_n = \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^n$

7.2 Reihen

Aufg. 7.2.1 Bestimmen Sie die Summe s der folgenden unendlichen Reihe als Grenzwert der Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ihrer Partialsummen

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Hinweis: Verwenden Sie $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Aufg. 7.2.2 Folgende periodische Dezimalbrüche sind mit Hilfe einer unendlichen geometrischen Reihe in gewöhnliche Brüche umzuwandeln:

$$\text{a) } 0, \overline{3} \quad \text{b) } 0, \overline{6} \quad \text{c) } 0, \overline{27} \quad \text{d) } 0, \overline{8} \quad \text{e) } 0, \overline{59} \quad \text{f) } 0, \overline{5437}$$

Aufg. 7.2.3 Entwickeln Sie $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ in eine unendliche Reihe, wobei x als reeller Parameter aufgefaßt wird. Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel für die geometrische Reihe.

8 Funktionen

8.1 Zum Begriff der Funktion und elementare Eigenschaften von Funktionen

Aufg. 8.1.1 Sind durch folgende Zuordnungen Funktionen $y = f(x)$ erklärt?

$$\text{a) } y = \begin{cases} x^2 + 1, 04 & \text{für } x \leq 1,6 \\ 3x - 1, 2 & \text{für } x \geq 1,6 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} 2 & \text{für } x \neq 0 \\ x & \text{für } x^2 = x \end{cases}$$

$$\text{c) } |y| = \frac{\ln x}{x^2+1}, x \geq 1$$

$$\text{d) } y^2 = x$$

Aufg. 8.1.2 Bestimmen Sie $f(x-1)$, $f(x)-1$, $-f(x)$, $2f(x)$, $f(2x)$, wenn $f(x) = x\sqrt{x+1}$ ist.

Aufg. 8.1.3 Von folgenden Funktionen $y = f(x)$ sind in \mathbb{R} der größtmögliche Definitionsbereich zu ermitteln, der zugehörige Wertebereich anzugeben und eine Skizze anzufertigen:

$$\text{a) } y = \sqrt{1-|x|} \quad \text{b) } y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}} \quad \text{d) } y = 3x^2 + |x-2|$$

Aufg. 8.1.4 Von folgenden Funktionen $y = f(x)$ sind in \mathbb{R} der größtmögliche Definitionsbereich zu ermitteln und der zugehörige Wertebereich anzugeben:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{x+1}{x^2+3x+2} & \text{b) } y &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{c) } y &= \sqrt{3 - \frac{4x+3}{5-2x}} & \text{d) } y &= \sqrt{\frac{3x+2}{3-2x}} - 2 \end{aligned}$$

Aufg. 8.1.5 Gesucht sind die Nullstellen folgender Funktionen $y = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } y = e^{x^2-2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{e} \quad \text{b) } y = 10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100$$

Aufg. 8.1.6 Welche der folgenden Funktionen (bei größtmöglichem Definitionsbereich) sind gerade, welche sind ungerade und welche haben keine dieser Eigenschaften?

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= e^{-x} & \text{b) } y &= x^5 + 7x & \text{c) } y &= x \sin x \\ \text{d) } y &= (x+2)^2 & \text{e) } y &= x(e^{-x} + e^x) \end{aligned}$$

Aufg. 8.1.7 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertevorrat der nachstehend genannten Funktionen an. Untersuchen Sie, ob diese Funktionen auf ihren maximalen Definitionsbereich gerade oder ungerade sind. Welche Funktionen sind periodisch?

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 2|x| + \cos x, & \text{b) } y &= x^4 - 3x^2 + 1, & \text{c) } y &= \sqrt{x^2 - 1}, \\ \text{d) } y &= 2 \tan x, & \text{e) } y &= \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \text{f) } y &= \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Aufg. 8.1.8 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und geben Sie den maximalen Definitionsbereich und zugehörigen Wertevorrat von folgenden Funktionen an:

$$\text{a) } y = 2e^x, \quad \text{b) } y = x + \ln x, \quad \text{c) } y = \sin x + x.$$

$$\text{8.1.2) } f(x-1) = (x-1)\sqrt{x}, \quad f(x) - 1 = x\sqrt{x+1} - 1, \quad -f(x) = -x\sqrt{x+1}, \\ f(-x) = -x\sqrt{-x+1}, \quad 2f(x) = 2x\sqrt{x+1}, \quad f(2x) = 2x\sqrt{2x+1}$$

8.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Aufg. 8.2.1 Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 10^5 x^2 - 100 \sin^{50} x}{x^4 + 10^7 x^3 + 10^{10} x^2 + 1}$.

Aufg. 8.2.2 Berechnen Sie

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}},$$

- b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^2 - 2}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$,
- e) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\sin x - \frac{\cos x}{x} \right)$,

Aufg. 8.2.3 Die Stetigkeit der Funktion $y = f(x)$ ist zu diskutieren. Im Falle einer Unstetigkeit ist zu untersuchen, ob die Unstetigkeit hebbar ist.

- a) $y = \frac{x}{|x|}$,
- b) $y = \sin \frac{1}{x}$,
- c) $y = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$,
- d) $y = \frac{1-x}{1-|x|}$.

8.3 Die Umkehrfunktion

Aufg. 8.3.1 Geben Sie die Umkehrfunktionen an von:

- a) $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}}, x \geq 0$,
- b) $y = f(x) = \frac{x-2}{x+4}, x \neq -4$,
- c) $y = g(t) = \frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+4}}, t \geq 2$.

Aufg. 8.3.2 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}.$$

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D(f)$ von f und zeigen Sie, daß f darauf streng monoton fallend ist. Bestimmen Sie den Wertebereich $W(f)$.
- b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f .
- c) Skizzieren Sie f und f^{-1} .

8.4 Ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen

Aufg. 8.4.1 Gegeben sei die ganzrationale Funktion (Polynom)

$$y = f(x) = 7x^8 - 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 7x + 9.$$

Berechnen Sie $f(3)$, $f(5)$ und $f(9)$ nach dem Horner-Schema.

Aufg. 8.4.2 Zerlegen Sie weitestgehend in ein Produkt von reellen Polynomen:

a) $P_6(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 8x^2$

b) $P_5(x) = 2x^5 + 2x^4 - 12x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

c) $P_5(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 104x - 120$

Aufg. 8.4.3 Gegeben sei $P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 36x - 90$.

a) Zeigen Sie, daß $P_4(x)$ zwischen $x = 4$ und $x = 5$ eine ungerade Anzahl von Nullstellen besitzt.

b) Führen Sie die Partialdivisionen durch:

$$P_4(x) : (x - 3 \cdot \sqrt{2}) \quad P_4(x) : (2x + 8)$$

Aufg. 8.4.4 Ermitteln Sie von den gebrochen rationalen Funktionen $y = f(x)$ die Nullstellen, Polstellen (jeweils Vielfachheit angeben) und Lücken. Geben Sie die Asymptoten an, und skizzieren Sie den Graphen von f und die Asymptoten.

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)^2(x+2)}$,

b) $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6}$,

c) $y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}$.

Aufg. 8.4.5 (*) Aus der 4-stelligen Tafel der natürlichen Werte der Tangensfunktionen entnimmt man folgende Werte:

α	88, 30°	88, 40°	88, 50°	88, 60°
$\tan \alpha$	33, 69	35, 80	38, 19	40, 92

Es ist $\tan 88,36$ mittels kubischer Interpolation zu berechnen!

Aufg. 8.4.6 (*) Es ist die ganzrationale Funktion von niedrigstem Grad zu bestimmen, die die Punkte

a) $(-1;-1)$, $(1;25)$, $(2;26)$, $(4;-56)$

b) $(-2;1)$, $(1;-6,5)$, $(4;-5)$, $(5;-2,5)$

enthält.

Aufg. 8.4.7 (*) Welche Parabel hat mit dem Bogen der Sinuslinie $y = \sin x$, $(0 \leq x \leq \pi)$, den Scheitel und die Schnittpunkte mit der x -Achse gemeinsam?

9 Differentialrechnung

9.1 Ableitungen von Funktionen

Aufg. 9.1.1 Auf welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen f definiert, wo sind sie differenzierbar, und wie lautet jeweils ihre Ableitung, falls $f(x)$ gleich ist:

- a) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, b) $a(x^2)^{-1/3}$,
c) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, d) $x^n a^x$, $a > 0$,
e) $x^{1/3} e^{\sqrt{x}}$, f) $(2x^2 + 4x)(3x^3 - 2x^2 + 3)$,
g) $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, h) $\frac{2 \sin x + \cos x}{x^2}$,
i) $\ln |\tan x|$, j) $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$ (Skizze!).

Aufg. 9.1.2 Differenzieren Sie nach x !

- a) $y = \sin^2(2x + 4)$ b) $y = \cos^2(x^2 - 7)$
c) $y = \sin^2(3x - 4) \cdot \cos(2x - 7)$ d) $y = \sin^3(2\sqrt{x} + x)$

Aufg. 9.1.3 Differenzieren Sie zweimal nach x !

- a) $y = -4 \cdot \tan^2 x + 2 \cdot \cot^{-2} x$
b) $y = \sin^2 x \cdot \tan 2x \cdot \cot^5 3x$

Aufg. 9.1.4 Unter welchem Winkel schneiden einander a) die Sinus- und Cosinuskurve, b) die Tangens- und Cotangenskurve?

Aufg. 9.1.5 Mittels logarithmischer Differentiation berechne man die Ableitungen folgender Funktionen:

- a) $x^{1/x}$, b) $\sqrt{x}^{\tan x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,
c) $(2x)^{\sin x}$, $x > 0$.

Aufg. 9.1.6 Bilden Sie die n -ten Ableitungen der folgenden Funktionen:

- a) $(3x + 2)^9$, b) $\frac{x}{3x+2}$
c) $e^{-x} \cos x$ für $n = 4$.

Aufg. 9.1.7 (*) Mit dem Newton-Verfahren berechne man die kleinsten positiven Lösungen (Genauigkeit: 2 Dezimalstellen) von

- a) $x^2 = \sin(\pi x)$,
b) $x^4 + x - 1 = 0$.

9.2 Kurvendiskussion

Aufg. 9.2.1 Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Unendlichkeitsstellen, relative und absolute Extrema und Wendepunkte der durch folgende Ausdrücke gegebenen Funktionen und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

a) $\frac{x^3}{10(x-2)}$, b) $\frac{x^3}{x-1}$,

c) $x^2 e^{-x^2}$.

Aufg. 9.2.2 Führen Sie die Kurvendiskussion für

a) $y = f(x) = \frac{4x(x-2)}{x^2+1(x-2)}$,

b) $y = f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x)(x-3)^2}$

durch.

9.3 Extremwertaufgaben

Aufg. 9.3.1 Welche Punkte (x, y) der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ haben vom Punkt $(1; 0)$ die kleinste Entfernung?

Aufg. 9.3.2 Der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist dasjenige Rechteck mit achsenparallelen Seiten einzubeschreiben, dessen Flächeninhalt ein Maximum wird.

Aufg. 9.3.3 Es soll ein oben offenes zylindrisches Gefäß von 10ℓ Inhalt gefertigt werden. Wie sind die Maße zu wählen, damit möglichst wenig Material verbraucht wird ?

10 Integralrechnung

10.1 Integration durch Grundintegrale

Aufg. 10.1.1 Berechnen Sie die Integrale!

a) $\int 3 dx$ b) $\int -0,73x dx$ c) $\int (-3x^2 + 7x - 2) dx$

d) $\int 2x^{c+1} dx$ $c = const.$ e) $-\int \frac{nx^n}{n-1} dx$ $n \in \mathbb{N}$

f) $\int (x^2 + \frac{1}{x}) dx$ g) $\int \frac{\sin \alpha}{3x^2} dx$

h) $\int (6 \sin x - \cos x) dx$

10.2 Integration durch Substitution

Aufg. 10.2.1 Integrieren Sie mittels Substitution!

a) $\int \sin 4x \, dx$ b) $\int \cos(-2x + 1) \, dx$

c) $\int (ax + b)^n \, dx$ d) $\int e^{-3t} \, dt$

e) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$

Aufg. 10.2.2 Lösen Sie die folgenden Integrale mit der angegebenen Substitution!

a) $\int e^x \cdot (a + e^x) \, dx$ mit $t = e^x + a$

b) $\int \cot x \, dx$ mit $t = \sin x$

c) $\int \frac{\sin x}{a \cos x + b} \, dx$ mit $t = a \cos x + b$

d) (*) $\int \sqrt{a - x^2} \, dx$ mit $x = \sqrt{a} \cdot \cos t$

10.3 Partielle Integration

Aufg. 10.3.1 Integrieren Sie nach x mittels der Methode der partiellen Integration!

a) $\int \ln x \, dx$ ($= \int 1 \cdot \ln x \, dx$) b) $\int x \sin x \, dx$

c) $\int \sin^2 x \, dx$ (Beachten Sie $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

d) $\int (4 - 2x)^2 e^x \, dx$

10.4 Weiterführende Aufgaben

Aufg. 10.4.1 (*) Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion von

a) $y = e^{x+1} + 2^{-x} - \pi$, b) $y = \frac{5}{2} x \sqrt{x} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{7}{x}$,

c) $y = e^x \cosh x + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$, d) $y = 3^x + 5 \cos x + \frac{2}{1+x^2}$.

Aufg. 10.4.2 (*) Durch Substitution berechne man

a) $\int \frac{6dx}{1-3x}$, b) $\int 3\sqrt{8x-4} \, dx$, c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+8}}$,

d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} \, dx$.

Aufg. 10.4.3 (*) Berechnen Sie mittels partieller Integration oder durch Substitution:

a) $\int x(\sin x^2 + \cos x^2) \, dx$, b) $\int x e^{3x} \, dx$,

c) $\int \sin^3 x \, dx$.

Aufg. 10.4.4 (*) Durch Zurückführung auf Grundintegrale und Substitution bestimme man:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$, c) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x+x^2}}$,

d) $\int \sqrt{16-x^2} \, dx$.

Aufg. 10.4.5 (*) Benutzen Sie die Partialbruchzerlegung, um folgende Integrale zu bestimmen:

a) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \, dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} \, dx$,

c) $\int \frac{2x^2+9x+12}{x^2+6x+10} \, dx$.

10.5 Das bestimmte Integral

Aufg. 10.5.1 Berechnen Sie:

a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_0^2 (x^2 - 3e^x + 2 \sin x) \, dx$ c) $\int_{-1}^1 x^n \, dx, n \in \mathbb{N}$

d) Bestimmen Sie $p > 1$ so, daß $\int_1^p \frac{dx}{x} = \int_1^p \ln x \, dx$ gilt.

e) $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| \, dx$

Aufg. 10.5.2 Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-1, 5]$ von den beiden Kurven mit den Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + x + 11)$$

eingeschlossen wird.

Aufg. 10.5.3 Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von den beiden Kurven mit den Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad y = 0$$

eingeschlossen wird.

Aufg. 10.5.4 (*) Man berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation der Kurve mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{\cosh x}, \quad x \in [-2, 2],$$

um die x-Achse entsteht.

Aufg. 10.5.5 (*) Die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiere a) um die x-Achse, b) um die y-Achse. Bestimme die Volumen der dabei entstehenden Körper.